Title	Autoequivalences on smooth projective surfaces
Author(s)	上原, 北斗
Citation	代数幾何学シンポジウム記録 (2017), 2017: 3-14
Issue Date	2017
URL	http://hdl.handle.net/2433/229086
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Autoequivalences on smooth projective surfaces*

上原 北斗 (首都大学東京理工学研究科)

1 導入

$\mathbb{C}$ 上定義された滑らかで射影的な代数多様体 X に対し, その連接層のなすアーベル圏の有界導来圏を $D(X) = D^b(\mathrm{Coh}(X))$ で表すことにする. 以下では射影 $X \times Y \to X$ を p_X や p_1, $X \times Y \to Y$ を p_Y や p_2 などと表す. また $\alpha \in D(X)$ に対し, その台を

$$\mathrm{Supp}(\alpha) := \bigcup_i \mathrm{Supp}(\mathcal{H}^i(\alpha))$$

で定め, その閉部分集合としての次元を $\dim(\alpha)$ で表す.

次の定理は代数多様体の導来圏の間の関手の研究において最も重要な結果の 1 つである.

Theorem 1.1 (Orlov)**.** 滑らかで射影的な代数多様体 X, Y に対し, 充満忠実な $\mathbb{C}$-線形三角関手

$$\Phi\colon D(X) \to D(Y)$$

が存在するとする. このとき対象 $\mathcal{P} \in D(X \times Y)$ が同型を除いてただ 1 つ存在し,

$$\Phi \cong \Phi^{\mathcal{P}}$$

が成り立つ. ここで

$$\Phi^{\mathcal{P}} (= \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y}) := \mathbb{R}p_{Y*}(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_X^*(-))\colon D(X) \to D(Y)$$

と定める.

上で定義した関手 $\Phi^{\mathcal{P}}$ を**積分関手**, また $\mathcal{P}$ を積分関手 $\Phi^{\mathcal{P}}$ の**核**と呼ぶ. さらに積分関手 $\Phi^{\mathcal{P}}$ が同値であるときは $\Phi^{\mathcal{P}}$ を *Fourier–Mukai* **変換**と呼ぶ. さて, それでは Fourier–Mukai 変換 $\Phi^{\mathcal{P}}\colon D(X) \to D(Y)$ が存在するとき,

*2017 年 10 月 24 日 代数幾何学城崎シンポジウム 2017 発表原稿

X と Y の間に幾何的な関係は存在するであろうか? Fourier–Mukai 変換 $\Phi^{\mathcal{P}}$ はその核 $\mathcal{P} \in D(X \times Y)$ で決まるので, 核がこの Fourier–Mukai 変換の全ての情報を持っていると言える. [Ue16, Ue18] では X, Y が代数曲面であるときに, この核 $\mathcal{P}$ の台 $\mathrm{Supp}(\mathcal{P})$ のある既約成分の次元と X, Y の間の幾何的な関係について考察し, それを導来圏の自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ の研究に応用した. これらを解説するのが本稿の目的である.

まず始めに用語を準備していこう.

2 Fourier–Mukai 変換の核

X と Y を滑らかな射影的代数多様体とし, 積分関手

$$\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y} \colon D(X) \to D(Y)$$

が与えられているとする. $D(X \times Y)$ の対象を

$$\mathcal{P}_R := \mathcal{P}^{\vee} \otimes p_Y^* \omega_Y[\dim(Y)], \quad \mathcal{P}_L := \mathcal{P}^{\vee} \otimes p_Y^* \omega_Y[\dim(Y)]$$

と定めると $\Phi^{\mathcal{P}_R}_{Y \to X}$ は Φ の右随伴関手になり, $\Phi^{\mathcal{P}_L}_{Y \to X}$ は Φ の左随伴関手となることがわかる.

さて以下では Φ が Fourier–Mukai 変換であるとする. このとき右随伴関手と左随伴関手は Φ の擬逆関手 $\Phi^{\mathcal{Q}}$ と一致し, 特に

$$\mathcal{P}_R \cong \mathcal{P}_L \tag{1}$$

がわかる.[1] このことから例えば $\dim(X) = \dim(Y)$ がわかり, さらに

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{P}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$$

が成り立つことがわかる. また Fourier–Mukai 変換 Φ と, 任意の (閉) 点 $x \in X$ に対し,

$$\Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x) \tag{2}$$

が成り立つことが知られている.[2]

$$\Gamma := \mathrm{Supp}(\mathcal{P})$$

と置き, 射 $p_X|_{\Gamma}$ の点 $x \in X$ 上のファイバーを Γ_x で表すと

$$\mathcal{P}|_{x \times X} \cong \Phi(\mathcal{O}_x) \qquad \mathrm{Supp}(\mathcal{P}|_{x \times X}) = \Gamma_x \tag{3}$$

[1] 実は充満忠実な積分関手 $\Phi^{\mathcal{P}} = \Phi^{\mathcal{P}}$ に対し, (1) が成り立てば $\Phi^{\mathcal{P}}$ は Fourier–Mukai 変換になる [Hu06, Proposition 7.6].

[2] 実は充満忠実な積分関手 $\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}$ に対し, (2) が成り立てば, Φ は Fourier–Mukai 変換になる [Hu06, Proposition 7.11].

となり, これらから $\Gamma_x = \mathrm{Supp}(\Phi(\mathcal{O}_x))$ が成り立ち, さらに Γ のある種の既約成分のなす集合を

$$\mathrm{Comp}(\Phi) := \{W_0 \mid W_0 \text{は} \mathrm{Supp}(\mathcal{P}) \text{の既約成分であり}, p_X(W_0) = X\}$$

と置くと, Φ が同値であるという事実から $\mathrm{Comp}(\Phi) \neq \emptyset$ が直ちにわかる. $W \in \mathrm{Comp}(\Phi)$ に対し, 明らかに

$$\dim X \leq \dim W \leq 2 \dim X$$

となる. そこで以下では, この 2 つの両極端な場合, $\dim X = \dim W$, および $2 \dim X = \dim W$ が成り立つ場合を考察しよう.

2.1 K-同値型の Fourier–Mukai 変換

Proposition 2.1. *Fourier–Mukai* 変換 $\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y} \colon D(X) \to D(Y)$ に対し, $\mathrm{Comp}(\Phi)$ の元 W が $\dim W = \dim X$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

(i) W は X と Y の間のある双有理写像のグラフを与え, さらに W の特異点解消を $\nu \colon \widetilde{W} \to W$ とすると, ある $m > 0$ に対し,

$$\nu^*(p_X|_W)^*\omega_X \cong \nu^*(p_Y|_W)^*\omega_Y$$

が成り立つ. つまり X と Y は K-同値である.

(ii) W は $\mathrm{Comp}(\Phi)$ の唯一の元である.

例えば Proposition 2.1(i) は, [Ka02] で観察された事実であり, (少し議論は必要だが)(1) の帰結である. Fourier–Mukai 変換 $\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y} \colon D(X) \to D(Y)$ に対し, $\mathrm{Comp}(\Phi)$ の元 W が $\dim X = \dim W$ を満たすとき, Φ を K-**同値型**と呼ぼう.

Remark 2.2. 任意の (閉) 点 $x \in X$ に対し $\mathrm{Supp}(\Phi(\mathcal{O}_x))$ は連結であることに注意すると, 次が同値であることがわかる.

(i) 一般の点 $x \in X$ に対し, $\dim \Phi(\mathcal{O}_x) = 0$.

(ii) 一般の点 $x \in X$ に対し, 点 $y \in Y$ と整数 n が存在し, $\Phi(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_y[n]$.

(iii) Φ は K-同値型.

したがって K-同値型の Fourier–Mukai 変換の合成, 擬逆関手も再び K-同値型の Fourier–Mukai 変換になり, 特に

$$\mathrm{Auteq}_{\text{K-equiv}} D(X) := \{\Phi \in \mathrm{Auteq}\, D(X) \mid \Phi \text{ は } K\text{-同値型}\}$$

と定めると, $\mathrm{Auteq}_{\text{K-equiv}} D(X)$ は $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ の部分群となる.

Example 2.3. 直線束をテンソルすること, 自己同型で押し出しすること, シフト関手 [1] はそれぞれ $D(X)$ の自己同値を与える. したがって任意の代数多様体に対し, 自己同値群 $\operatorname{Auteq} D(X)$ はその部分群として

$$A(X) := \operatorname{Pic}(X) \rtimes \operatorname{Aut}(X) \times \mathbb{Z}[1]$$

を含む. $A(X)$ の元 Φ は $\varphi \in \operatorname{Aut}(X)$, $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ を用いて,

$$\Phi = \varphi_* \circ ((-) \otimes \mathcal{L}) \circ [i]$$

と書けるので, φ のグラフを Γ_φ で表すと, Fourier–Mukai 変換 Φ の核は

$$(\mathcal{O}_{\Gamma_\varphi} \otimes p_1^* \mathcal{L})[i] \in D(X \times X) \tag{4}$$

となる. したがってその台は Γ_φ であり,

$$\operatorname{Comp}(\Phi) = \{\Gamma_\varphi\}$$

が成り立ち, 特に Φ は K-同値型であることがわかる.

K-同値型の Fourier–Mukai 変換が存在すれば X と Y が K-同値であることは上で述べた. 逆に X と Y が K-同値であれば, フロップの合成で結べることが知られており, 一方, X と Y の間にフロップがあれば, K-同値型の Fourier–Mukai 変換が存在すると期待されている. そこで次が予想される.[3]

Conjecture 2.4. *滑らかな射影的代数多様体 X, Y に対し, X と Y が K-同値であれば K-同値型の Fourier–Mukai 変換 $\Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y} \colon D(X) \to D(Y)$ が存在する.*

2.2 Calabi–Yau 型の Fourier–Mukai 変換

次に $\dim W = 2 \dim X$ の場合を考察しよう.

Proposition 2.5. *Fourier–Mukai 変換 $\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y} \colon D(X) \to D(Y)$ に対し, $\operatorname{Comp}(\Phi)$ の元 W が $\dim W = 2 \dim X$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.*

(i) $W = X \times Y$, 特に W は $\operatorname{Comp}(\Phi)$ の唯一の元である.

(ii) $K_X \equiv 0$ かつ $K_Y \equiv 0$.

[3]但し, フロップの合成で結べる, と言ったときは特異点を持った代数多様体も経由することもある. 滑らかな代数多様体と特異点を持つ代数多様体の導来圏の間に同値はない事がわかるので, この議論にはややギャップがある.

Proposition 2.5 の状況 ($\dim W = 2\dim X$) を満たすとき $\mathrm{Supp}(\mathcal{P}) = X \times Y$ であるから, $\mathrm{Supp}(\Phi(\mathcal{O}_x)) = Y$ が成り立つ. (2) を使えば $K_Y \equiv 0$ となり, またこのとき [Ka02, Theorem 2.3] を使えば, $K_X \equiv 0$ となることがわかる. そこで Fourier–Mukai 変換 $\Phi = \Phi^{\mathcal{P}}_{X\to Y}\colon D(X) \to D(Y)$ に対し, $\mathrm{Comp}(\Phi)$ の元 W が $\dim X = \dim W$ を満たすとき, Φ を *Calabi–Yau* 型と呼ぶことにしよう.

Example 2.6. A をアーベル多様体, $\widehat{A}$ を A の双対アーベル多様体, $\mathcal{P}_0$ を Poincare 束とすると 積分関手 $\Phi^{\mathcal{P}}\colon D(\widehat{A}) \to D(A)$ は Fourier–Mukai 変換を定めることが 1980 年頃に向井によって発見された. $\mathcal{P}$ は $\widehat{A} \times A$ 上のベクトル束であり, 特に $\mathrm{Comp}(\Phi) = \{\widehat{A} \times A\}$ となる. 特に Φ は Calabi–Yau 型となる.

2.3 Fourier–Mukai 変換の例

Example 2.7. $\alpha \in D(X)$ が**球面対象**であるとは

$$\alpha \otimes \omega_X \cong \alpha$$

であり, さらに

$$\mathrm{Hom}^k_{D(X)}(\alpha, \alpha) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 0, \dim(X) \\ \mathbb{C} & \text{if } k = 0, \dim(X) \end{cases}$$

を満たすものを言う. $K3$ 曲面上の直線束は明らかに球面対象である. また代数曲面 X 上の (-2)-曲線上の直線束を $D(X)$ の対象と自然に思えば, これは球面対象である.

球面対象 $\alpha \in D(X)$ に対し, 自然な射 $p_1^*\alpha^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^*\alpha \to \mathcal{O}_{\Delta_X}$ の写像錐

$$\mathcal{C} := \mathrm{Cone}(p_1^*\alpha^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^*\alpha \to \mathcal{O}_{\Delta_X}) \in D(X \times X) \tag{5}$$

を核に持つ積分関手 $T_\alpha := \Phi^{\mathcal{C}}$ は $D(X)$ の自己同値を定めることが知られている. T_α を球面対象 α の**捩れ関手**と呼ぶ. 核 (5) の定め方から, 任意の対象 $\beta \in D(X)$ に対し, 完全三角形

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D(X)}(\alpha, \beta) \otimes_{\mathbb{C}} \alpha \to \beta \to T_\alpha(\beta) \tag{6}$$

が存在する. $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D(X)}(\alpha, \mathcal{O}_x) = 0$ であることと $x \notin \mathrm{Supp}(\alpha)$ であることは [BM02, Lemma 4.2] により同値であることが知られている. 完全三角形 (6) を $\beta = \mathcal{O}_x$ に適用することで, $x \in \mathrm{Supp}(\alpha)$ に対しては

$$\mathrm{Supp}(T_\alpha(\mathcal{O}_x)) = \mathrm{Supp}(\alpha)$$

であり, $x \notin \mathrm{Supp}(\alpha)$ であるときは

$$T_\alpha(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_x$$

が成り立つことがわかる．したがって式 (3) と核 (5) の定め方から

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{C}) = \Delta_X \cup (\mathrm{Supp}(\alpha) \times \mathrm{Supp}(\alpha)) \subset X \times X$$

が成り立つ．そこで C が代数曲面 X の (-2)-曲線であれば捩れ関手 $T_{\mathcal{O}_C}$ は K-同値型であり, $K3$ 曲面 X の構造層 $\mathcal{O}_X$ から定まる捩れ関手 $T_{\mathcal{O}_X}$ は Calabi–Yau 型である．

Example 2.8. 最後に K-同値型でも Calabi–Yau 型でもない Fourier–Mukai 変換の例を挙げておこう．滑らかで射影的な代数曲面 S が極小楕円ファイブレーション $\pi\colon S \to C$ を持つとする．$D(S)$ の対象 E に対し, E の**ファイバー次数**を

$$d(E) := c_1(E) \cdot F$$

で定める．但し F は π の一般ファイバーである．さらに λ_S を $D(S)$ の対象のファイバー次数の最大公約数であるとする．整数 b を λ_S と互いに素にとると π の純 1 次元相対安定層のモジュライ空間の 2 次元の既約成分 $J_{S/C}(b) = J_S(b)$ であって, π の滑らかなファイバーに台を持つ次数 b の直線束に対応する点を含むものが存在する．$J_S(b)$ の点 y を, それに対応する安定層で台が $\pi^{-1}(x)$ であるとき, y を C の点 x に送る射

$$J_S(b) \to C$$

が存在し, これも極小楕円ファイブレーションとなる．例えば $J_S(0)$ は S の Jacobian 曲面 $J(S)$ と同型で, $J_S(1)$ は S と同型である．$J_S(b) \times_C S$ 上の普遍層 $\mathcal{U}$ を核に持つ積分関手 $\Phi = \Phi^{\mathcal{U}}_{J_S(b)\to S}$ は同値を与えることが知られている ([Br98, Theorem 5.3])．このとき $\mathrm{Supp}(\mathcal{U}) = J_S(b) \times_C S$ となり, したがって $\mathrm{Comp}(\Phi) = \{J_S(b) \times_C S\}$ が成り立つ．$\dim(J_S(b) \times_C S) = 3$ であるから, Φ は K-同値型でも Calabi–Yau 型でもない．

3 Fourier–Mukai support 次元

与えられた滑らかな射影的代数多様体 X に対し, その *Fourier–Mukai support* **次元**を

$$N_X := \max\{\dim(W_0) \mid \Phi^{\mathcal{P}} \in \mathrm{Auteq}\, D(X), W_0 \in \mathrm{Comp}(\Phi^{\mathcal{P}})\}$$

で定めと, 明らかに $\dim(X) \le N_X \le 2\dim(X)$ である．以下ではこのうち 2 つの両極端の場合, つまり $N_X = \dim(X)$ であるときと $N_X = 2\dim(X)$ であるときを考察しよう．

3.1 K-同値型の自己同値群

$\mathrm{Auteq}_{\text{K-equiv}}\, D(X)$ は $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ の部分群であった．Proposition 2.1 より次が同値であることがわかる．

- $\mathrm{Auteq}_{\text{K-equiv}}\, D(X) = \mathrm{Auteq}\, D(X)$.
- $N_X = \dim(X)$.
- どんな $\Phi \in \mathrm{Auteq}\, D(X)$ をとっても, $X \times X$ の既約閉部分集合の集合である $\mathrm{Comp}(\Phi)$ はただ 1 つの元からなり, それは X から X 自身へのある双有理写像のグラフとなる.

上の条件が満たされるとき, $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ は K-**同値型**であるという．次はその典型例を与える．

Proposition 3.1 (Kawamata)**.** *滑らかな射影的代数多様体 X に対し, K_X, もしくは $-K_X$ が巨大であるときその自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ は K-同値型となる.*

3.2 Calabi–Yau 型の自己同値群

定義より直ちに次が同値であることが従う．

- 自己同値 $\Phi \in \mathrm{Auteq}\, D(X)$ が存在し, Φ は Calabi–Yau 型である.
- $N_X = 2\dim(X)$.

上の条件が満たされるとき, $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ が *Calabi–Yau* **型**であるという．Proposition 2.5 により, $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ が Calabi–Yau 型であるときは $K_X \equiv 0$ が成り立つ．この逆が成り立つかどうかを考えるのは自然な問題であろう．

Problem 3.2. *滑らかで射影的な代数多様体 X に対し $K_X \equiv 0$ が成り立つとする．このとき $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ は Calabi–Yau 型か?*

Problem 3.2 はアーベル多様体のとき肯定的 [Ue18] で, さらに以下で述べる Theorem 3.3 により, 代数曲面のときにも肯定的であることがわかる．

3.3 代数曲面の自己同値群の Fourier–Mukai support 次元

代数曲線と代数曲面の自己同値群の Fourier–Mukai support 次元に関する [Ue18] で得られた結果を見ていこう．Proposition 3.1 と, アーベル多様体 X の自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ は Calabi–Yau 型になる, という事実を合わせれば代数曲線に関する次の結果を得る．

Theorem 3.3 (Dichotomy)**.** *C を種数 $g(C)$ の滑らかで射影的な代数曲線とし，$N_C \in \{1,2\}$ をその Fourier–Mukai support 次元とする．このとき次が成り立つ．*

(i) $N_C = 2$ (つまり $\mathrm{Auteq}\, D(C)$ が Calabi–Yau 型) であることと，$g(C) = 1$，つまり C が楕円曲線であることは同値である．

(ii) $N_C = 1$ (つまり $\mathrm{Auteq}\, D(C)$ が K-同値型) であることと，$g(C) \neq 1$，つまり C が射影直線，もしくは一般型代数曲線であることは同値である．

代数曲面の場合は次がわかる．

Theorem 3.4 (Trichotomy)**.** *S を滑らかで射影的な代数曲面とし，$N_S \in \{2,3,4\}$ をその Fourier–Mukai support 次元とする．*

(i) $N_S = 4$ (つまり $\mathrm{Auteq}\, D(S)$ が Calabi–Yau 型) であることと，$K_S \equiv 0$ であることは同値．

(ii) $N_S = 3$ であることと，S は極小楕円ファイブレーションを持ち，さらに $K_S \not\equiv 0$ を満たすことは同値．

(iii) $N_S = 2$ (つまり $\mathrm{Auteq}\, D(S)$ が K-同値型) であることと，S は極小楕円ファイブレーションを持たず，さらに $K_S \not\equiv 0$ を満たすことは同値．

滑らかな射影代数曲線 C, C' に対し，$D(C) \cong D(C')$ であるときは，$C \cong C'$ となる．したがって明らかに Fourier–Mukai support 次元は導来不変量，つまり $D(C) \cong D(C')$ であるならば $N_C = N_{C'}$ が成り立つ．一方，滑らかな射影代数曲面 S, S' に対しては，$D(S) \cong D(S')$ かつ $S \not\cong S'$ であるような例が知られており，このとき S と S' は共に $K3$ 曲面，アーベル曲面，もしくは $K_S \not\equiv 0$ となる極小楕円曲面となることが知られている [BM01, Ka02]．したがって Theorem 3.4 より次を得る．

Corollary 3.5. *Fourier–Mukai support 次元は滑らかな射影的代数曲面の導来不変量である．*

これに関連して次が予想される．

Conjecture 3.6. *(i) Fourier–Mukai support 次元は滑らかな射影的代数多様体の導来不変量である．*

(ii) X と Y を互いに双有理で滑らかな射影的代数多様体とし，さらに自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D(X)$ は K-同値型であるとする．もし Fourier–Mukai 変換 $\Phi := \Phi^{\mathcal{P}}_{X \to Y}$ が存在するとき Φ も K-同値型となる．

Remark 3.7. [Ka02, Conjecture 1.2] において, 双有理であって, 導来同値でもある滑らかな射影代数多様体は必ず K-同値になるであろうと予想 (DK 予想) されていたが, 筆者により有理極小楕円曲面の反例が構成された [Ue04].

Conjecture 3.6 (ii) が成り立てば, もちろんこの場合は DK 予想は正しい. 逆に DK 予想を仮定すれば, 互いに双有理で滑らかな射影的代数多様体 X と Y の導来圏の間に Fourier–Mukai 変換 $\Phi := \Phi^{\mathcal{P}}_{X\to Y}$ が存在するとき X と Y は K-同値となり, さらに Conjecture 2.4 を仮定すれば K-同値型の Fourier–Mukai 変換 $\Psi\colon D(X) \to D(Y)$ も存在する. さらに Conjecture 3.6 (i) が成り立てば $\operatorname{Auteq} D(Y)$ も K-同値型となるから, 結局 $D(Y)$ の自己同値 $\Phi \circ \Psi^{-1}$ も K-同値型になり, 結局 Φ も K-同値となる. つまりこの場合には Conjecture 3.6 (ii) が成り立つ.

4 代数曲面の自己同値群

さて, 以下では代数曲面 S の Fourier–Mukai support 次元 N_S の値にしたがって, その自己同値群 $\operatorname{Auteq} D(S)$ の構造が大きく異なること (が期待されること) を観察していきたい.

4.1 Calabi–Yau 型の自己同値群

$N_S = 4$, つまり Calabi–Yau 型の自己同値群の研究は $N_S = 2, 3$ のときよりも難しく, まだ未解明な部分が多い. ここでは知られている結果を簡潔に引用するにとどめる.

Theorem 3.4 から Calabi–Yau 型の自己同値群を持つ代数曲面 S は $K3$ 曲面, アーベル曲面, 超楕円曲面, エンリケス曲面のいずれかである. このうち自己同値群の構造がよくわかっているのは次の場合である.

- ピカール数が 1 であるような $K3$ 曲面 [BB17].
- アーベル多様体 [Or02].
- いくつかの超楕円曲面 [Po17].

三角圏の安定性条件の空間はミラー対称性を動機として Bridgeland によって発見されたが, 特に $K3$ 曲面の導来圏の安定性条件の空間の解析には, その自己同値群の研究が非常に重要となることが知られている. こういった背景からも自己同値群の研究は非常に重要である.

4.2　極小楕円曲面の自己同値群

次に $N_S=3$ であるときを考えよう．このときは Theorem 3.4 より S は極小楕円ファイブレーション $\pi\colon S\to C$ をもち, $K_S\not\equiv 0$ を満たす．以下では例 2.8 で定義した記号を用いる．

Z を S 上の全ての (-2)-曲線たちの合併からなる集合とし, さらに

$$\mathrm{Br}_Z(S):=\langle T_\alpha \mid \alpha\in D_Z(S)\ \text{球面対象}\rangle\subset \operatorname{Auteq} D(S) \tag{7}$$

とする．また $m\in\mathbb{Z}$ に対し, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(m)$ を

$$\Gamma_0(m):=\left\{\begin{pmatrix} c & a\\ d & b\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\ \middle|\ d\in m\mathbb{Z}\right\}$$

と定める．このとき次が成り立つと予想する．

Conjecture 4.1. *S は滑らかで射影的な代数曲面で, $N_S=3$ であると仮定する．すなわちで, $K_S\not\equiv 0$ を満たし, さらに極小楕円ファイブレーション $\pi\colon S\to C$ を持つとする．このとき短完全列*

$$\begin{aligned}
&1\to\langle \mathrm{Br}_Z(S),\otimes\mathcal{O}_S(D)\mid D\cdot F=0,\ F\ \text{はファイバー}\rangle\rtimes \operatorname{Aut}(S)\times\mathbb{Z}[2]\\
&\quad\to \operatorname{Auteq} D(S)\\
&\quad\xrightarrow{\Theta}\left\{\begin{pmatrix} c & a\\ d & b\end{pmatrix}\in\Gamma_0(\lambda_S)\ \middle|\ J_S(b)\cong S\right\}\to 1
\end{aligned}$$

が存在する．ここで Θ は滑らかなファイバー F に対し, $\operatorname{Auteq} D(S)$ の $H^0(F,\mathbb{Z})\oplus H^2(F,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^2$ への作用によって引き起こされる準同型である．

π の可約なファイバーが I_n 型のみであるときは Conjecture 4.1 は正しいことが [Ue16] で示された．またその結果を使って [Ue17] において, 楕円曲線上の線織曲面の自己同値群が決定されている．

4.3　K-同値型の自己同値群

$N_S=2$ であるとき, すなわち K-同値型の自己同値群 $\operatorname{Auteq} D(S)$ を考えよう．このとき次を予想する．ここで $\mathrm{Br}_Z(S)$ は (7) と同様に定義した $\operatorname{Auteq} D(S)$ の部分群である．

Conjecture 4.2. *S は滑らかで射影的な代数曲面で $N_S=2$ とする．すなわち, $K_S\not\equiv 0$ を満たし, さらに極小楕円ファイブレーション $\pi\colon S\to C$ を持たないものとする．このとき*

$$\operatorname{Auteq} D(S)=\langle \mathrm{Br}_Z(S),\operatorname{Pic}(S)\rangle\rtimes\operatorname{Aut}(S)\times\mathbb{Z}[1]$$

が成り立つ．

Z の全ての連結成分が (-2)-曲線の鎖, つまり A 型となっているとき Conjecture 4.2 は正しいことが [Ue18] で示された. この結果は [IU05, Theorem 1.5] や [BP14, Theorem 1] の一般化になっている.

ここまで自己同値群の生成元を見つけることに主眼をおいていたが, 最後にその群構造の研究にも触れておく. [IUU10] では, A_n 型特異点の極小特異点解消の導来圏において, $\mathrm{Br}_Z(S)$ がアファイン組み紐群であることを示しており, この結果を用いて, その安定性条件の空間の構造を完全に決定した.

参考文献

[BB17] A. Bayer, T. Bridgeland, *Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1.* Duke Math. J. 166 (2017), 75–124.

[Br98] T. Bridgeland, *Fourier–Mukai transforms for elliptic surfaces.* J. Reine Angew. Math. 498 (1998), 115–133.

[BM01] T. Bridgeland, A. Maciocia, *Complex surfaces with equivalent derived categories.* Math. Z. 236 (2001), 677–697.

[BM02] T. Bridgeland, A. Maciocia, *Fourier-Mukai transforms for K3 and elliptic fibrations.* J. Algebraic Geom. 11 (2002), 629–657.

[BP14] N. Broomhead, D. Ploog, *Autoequivalences of toric surfaces.* Proc. of Amer. Math. Soc. 142 (2014), 1133–1146.

[Hu06] D. Huybrechts, *Fourier–Mukai transforms in algebraic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. viii+307 pp.

[IU05] A. Ishii, H. Uehara, *Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces.* J. Differential Geom. 71 (2005), 385–435.

[IUU10] A. Ishii, K. Ueda, H. Uehara, Stability conditions on A_n-singularities. J. Differential Geom. 84 (2010), no. 1, 87–126.

[Ka02] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence.* J. Differential Geom. 61 (2002), 147–171.

[Or02] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them.* Izv. Math. 66 (2002), 569–594

[Po17] R. Potter, *Derived autoequivalences of bielliptic surfaces.* arXiv:1701.01015.

[Ue04] H. Uehara, *An example of Fourier-Mukai partners of minimal elliptic surfaces.* Math. Res. Lett. 11 (2004), 371–375.

[Ue16] H. Uehara, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension.* Algebr. Geom. 3 (2016), 543–577.

[Ue17] H. Uehara, *Fourier–Mukai partners of elliptic ruled surfaces*, Proc. of Amer. Math. Soc. 145 (2017), 3221–3232.

[Ue18] H. Uehara, *A trichotomy for the autoequivalence groups on smooth projective surfaces.* accepted by Trans. Amer. Math. Soc.

Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minamiohsawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397, Japan

e-mail address : hokuto@tmu.ac.jp